積分教材の取り扱いについて

Treatment of integral material

遠　藤　秀　機（教育学部），貴　志　一　男（教育学部）
Hideki ENDO, Kazuo KISHI

この小文では，閉区間で定義された有界な単調関数の定積分の導入について述べる。

キーワード：積分可能，単調関数，連続関数

I．微分積分の講義をしていて思う一つに，積分は細かく分けて積もりその極限をとるということの理解が不十分であること，そのため微分積分学の基本定理の意義も十分に理解されていないのではないかということがある。

閉区間で有界な単調関数についての積分可能性は，割合に簡単に述べることができる。このことはよく知られた結果であり，多くの微分積分学の教科書でも取り扱われている。以下で述べるうち，途中まで（IIIまで）であれば，準備をたいして必要としないから高校生に対しても教材として用いることができると思う。また閉区間で連続な関数については，図1のように単調な有限個の部分に分けられる場合（普通に扱われる関数はたいていそのような関数である。），上述の単調関数の積分可能性を用いてその積分可能性を容易に示すことができる。そして一般の閉区間で連続な関数については，その積分可能性は証明されているという程度で止めておくことにする。

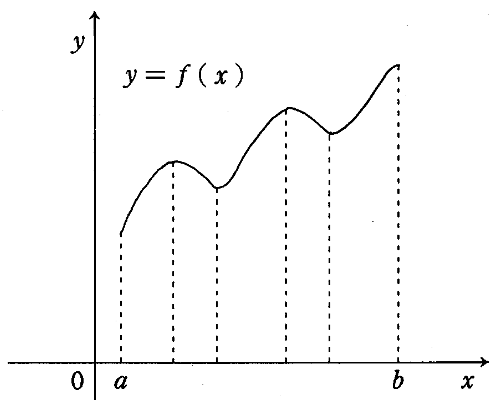

図 1

閉区間 I で連続な関数の積分可能性を示すには，この関数は I で一様連続であるという性質を必要とする。そのことは数学を専攻する学生や今後高度の数学を必要とする学生は理解しておく必要があると思うが，それ以外の学生には時間的制約もあり上述した程度でよいのではないかと考える。

II．閉区間 $[a, b]$ で定義された有界な関数 $y = f(x)$ の積分可能性は次のように定義される。いま区間 $[a, b]$ の分割

(1)　　$\Delta : x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_{n-1} < x_n = b$

に対して

(2)　$d(\Delta)=\max\{x_k-x_{k-1}: k=1, 2, \cdots\cdots, n\}$

とおく。各小区間 $I_k=[x_{k-1}, x_k]$ から任意に一点 ξ_k をとり，和

(3)　$\Sigma(\Delta)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$

をつくる。$d(\Delta)\to 0$ のとき，分割 Δ の仕方と $\{\xi_k\}$ のとり方に無関係に，$\Sigma(\Delta)$ が一定の値 σ に収束するならば，$f(x)$ は，$[a, b]$ で積分可能であるという。この極限値 σ を $\int_a^b f(x)dx$ と書き，a から b までの $f(x)$ の（定）積分という。

換言すれば，いかなる正数 ε をとっても，適当に正数 δ をえらべば，$d(\Delta)<\delta$ なる分割 Δ をとる限り，$\{\xi_k\}$ のとり方にかかわらず

$$|\Sigma(\Delta)-\sigma|<\varepsilon$$

となることである。

III. 有界な広義単調減少な関数については，以下の議論と同様にできるので，関数 $y=f(x)$ は区間 $I=[a, b]$ で有界な広義単調増加関数とする。すなわち I で $|f(x)|\leqq K$ をみたす定数 K が存在し，かつ $x_1, x_2\in I$，$x_1<x_2$ ならば $f(x_1)\leqq f(x_2)$ とする。この際関数の連続性は仮定しない。例えば閉区間 $[0, 1]$ において，

$$f(x)=\begin{cases} 1/n & (1/(n+1)<x\leqq 1/n)\quad (n\text{は自然数}) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

と定義すれば，この関数は単調増加であるが，点 $1/n$ $(n=2, 3, \cdots)$ はすべて不連続である。このような関数も考察の対象になる。

区間 $[a, b]$ の分割

$$\Delta_n: a=x_0<x_1<x_2<\cdots\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

に対して

$$d(\Delta_n)=\max\{x_k-x_{k-1}: k=1, 2, \cdots\cdots, n\}$$

とおく。Δ_{n+1} を Δ_n の細分とする。すなわち Δ_n の分点はそのままにして，さらに新しい分点を加える。さらに $n\to\infty$ のとき $d(\Delta_n)\to 0$ とする。例えば $[a, b]$ を 2^n 等分したものを Δ_n としたものは，そのような分割である。

いま

$$a_n=s(\Delta_n)=\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k-x_{k-1})$$

$$b_n=S(\Delta_n)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k-x_{k-1})$$

$$\Sigma(\Delta_n)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$$

とする。ただし ξ_k は $[x_{k-1}, x_k]$ の任意の点とする。このとき，容易にわかるように $\{a_n\}$ は広義単調増加数列で $\{b_n\}$ は広義単調減少数列であり，次式が成り立つ。

(4)　$f(a)(b-a)\leqq a_n\leqq \Sigma(\Delta_n)$
　　$\leqq b_n\leqq f(b)(b-a)$

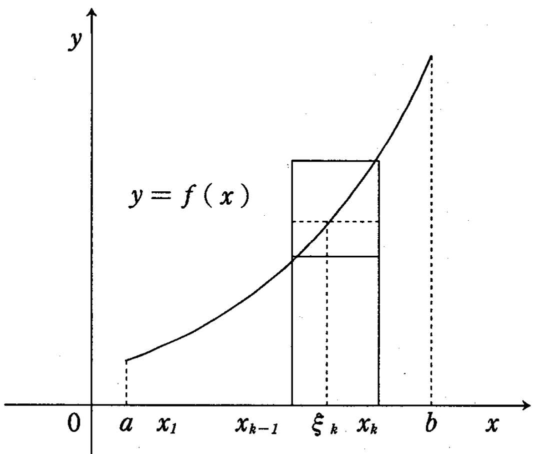

図 2

(5) $0 \leqq b_n - a_n = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1}) \leqq d(\Delta_n)(f(b) - f(a))$

ここで「有界な単調数列は収束する」という実数の性質を用いると，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は収束する。いま$\lim_{n\to\infty} a_n = s$，$\lim_{n\to\infty} k_n = S$とすると，$d(\Delta_n) \to 0\ (n\to\infty)$ であるから，(5)より $s = S$となる。$\sigma = s = S$とすると，(4)より

(3) $\lim_{n\to\infty} \Sigma\ (\Delta_n) = \lim_{n\to\infty} \Sigma f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sigma$

となる。前述したように高校生に指導するのであればこのσを$\int_a^b f(x)dx$と定義してよいのではないかと思う。次にσが$\int_a^b f(x)dx$となることを示す。

Ⅳ．Ⅱの(1)，(2)，(3)の記号を用いて

(4) $\lim_{d(\Delta)\to 0} \Sigma(\Delta) = \sigma$

となることを示す。

$$S(\Delta) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}), \quad s(\Delta) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$

とする。

(i) $d(\Delta) \to 0$のとき$S(\Delta) - s(\Delta) \to 0$となる。

このことは，

$$0 \leqq S(\Delta) - s(\Delta) = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1}) \leqq d(\Delta)(f(b) - f(a))$$

より得られる。

(ii) 任意の分割Δ_1，Δ_2について$s(\Delta_1) \leqq S(\Delta_2)$である。

いまΔ_1，およびΔ_2における分点を合併して生ずる分割をΔ_3とすれば，

$s(\Delta_1) \leqq s(\Delta_3) \leqq S(\Delta_3) \leqq S(\Delta_2)$

より$s(\Delta_1) \leqq S(\Delta_2)$。

(iii) $s(\Delta) \leqq \sigma \leqq S(\Delta)$

もし$s(\Delta) > \sigma$ならば，$s(\Delta) > b_n > \sigma$となるb_nが存在する。これは$s(\Delta) > S(\Delta_n)$となることで(ii)に反する。また$\sigma > S(\Delta)$ならば，$\sigma > a_n > S(\Delta)$となるa_nが存在する。これは$s(\Delta_n) > S(\Delta)$となることで(ii)に反する。

(iv) $\lim_{\sigma(\Delta)\to 0} S(\Delta) = \lim_{\sigma(\Delta)\to 0} s(\Delta) = \sigma$

上式は，

$|s(\Delta) - \sigma| = \sigma - s(\Delta) \leqq S(\Delta) - s(\Delta)$，

$|S(\Delta) - \sigma| = S(\Delta) - \sigma \leqq S(\Delta) - s(\Delta)$，

と (i) より得られる。

したがって$s(\Delta) \leqq \Sigma(\Delta) \leqq S(\Delta)$と (iv) より

$$\lim_{\sigma(\Delta)\to 0} \Sigma(\Delta) = \sigma$$

を得る。